EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**087**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+4i}{i}$.

(4p) **b)** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $\vec{v} = 3\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j}$ şi $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ să fie coliniari.

(4p) **c)** Să se calculeze aria totală a unui cub care are lungimea diagonalei $2\sqrt{3}$.

(4p) **d)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât centrul de greutate al triunghiului ABC cu vârfurile $A(2,-3)$, $B(a,b)$ şi $C(-3,2)$ să fie punctul $O(0,0)$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,-3)$, $B(1,1)$ şi $C(-3,2)$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos A$ dacă triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=4$, $AC=6$ şi $BC=8$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{Z_6}$ ecuaţia $\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{3}$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$.

(3p) **c)** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 + m$ să se divide cu polinomul $g = X - 1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^{-x} - 64 = 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $n^2 - 2n \le 0$.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{7n + f(0)}{5n - f(0)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A+I_2=B$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2=A$.

(2p) **d)** Să se calculeze A^{2007}.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n=I_2+(2^n-1)A$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $aA+bB+cI_2\neq C$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea $X=A^n+B^n$ este inversabilă, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, definite prin $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(2p) **b)** Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x)dx$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x)dx$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției g.

(2p) **e)** Să se arate că $t^2\sin^2 x-2t\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}\geq 0$, $\forall\, t\in\mathbf{R}$, $\forall\, x>0$.

(2p) **f)** Integrând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că

$$t^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x dx-2t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x^2}dx\geq 0,\ \forall\, t\in\mathbf{R}.$$

(2p) **g)** Să se arate, utilizând eventual punctul **f),** că

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x dx\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x^2}dx\right).$$